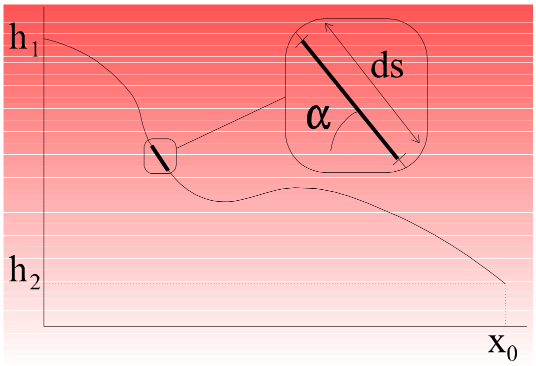
MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
Op vel 1: **studentnummer**, **naam**, **adres**, **postkode**, **woonplaats** en **studierichting**.
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

cijfer = (Σ punten)/3 + 1

Opgave 1. De skier



Een skier met een massa *m* glijdt met verwaarloosbare beginsnelheid van een *niet-rechte* helling af. De enige weerstand die hij daarbij ondervindt is het gevolg van de wrijvingskracht F_W tussen de skies en de sneeuw. Voor deze wrijving geldt:

$$F_W = \mu \cdot F_N \qquad \text{met } \mu = 0{,}2$$

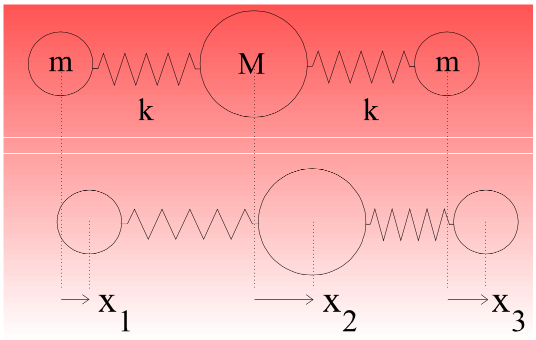
waarin F_N de normaalkracht van de helling op de skier is.

Als de skier in *horizontale richting* een afstand van 1500 m heeft afgelegd, komt hij tot stilstand.

2 a. Geef de wrijvingskracht in een willekeurig punt van de helling, uitgedrukt in de hellingshoek α ter plaatse.

3 b. Bereken uit de door de wrijvingskracht verrichte arbeid, hoeveel meter de skier in vertikale richting gedaald is.

Opgave 2. Trillingen van een CO_2 molekuul



Een vereenvoudigd model van een CO_2-molekuul bestaat uit drie massa's die op een rechte lijn liggen en die onderling verbonden zijn door een veer. De buitenste massa's hebben een massa m en de binnenste massa heeft een massa *M*. De veerkonstante is *k*. Als de massa's in trilling worden gebracht is de verplaatsing uit de evenwichtsstand van de massa's resp. x_1, x_2 *en* x_3 .

1 a. Geef de verplaatsing x_{CM} van het zwaartepunt uitgedrukt in de verplaatsingen x_1, x_2 *en* x_3 .

2 b. Stel de Lagrangiaan op voor het trillende systeem, uitgedrukt in $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$

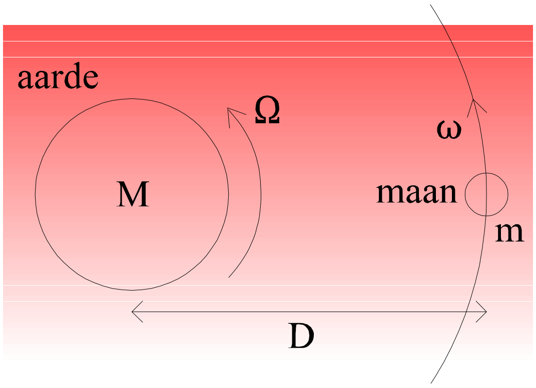
Veronderstel dat de buitenste massa's **in tegenfase** trillen, zodat dus: $x_1 = -x_3$. Ga er tevens van uit dat het zwaartepunt zich daarbij niet verplaatst.

2 c. Leidt voor dit geval de bewegingsvergelijking af en bereken de frequentie ω_1 waarmee de buitenste massa's trillen.

Veronderstel nu dat de buitenste massa's **in fase** trillen, zodat dus: $x_1 = x_3$. Ga er weer van uit dat het zwaartepunt zich niet verplaatst.

2 d. Bereken de frequentie ω_2 waarmee de buitenste massa's nu trillen.

Opgave 3. Het aarde-maan systeem



Beschouw de aarde en de maan als een geïsoleerd systeem (dus zonder invloeden van andere hemellichamen). De massa van de aarde *M* is zoveel groter dan de massa *m* van de maan, dat in goede benadering verondersteld mag worden dat het zwaartepunt van het systeem samenvalt met het centrum van de aarde.
De rotatie-as van de aarde staat loodrecht op het vlak waarin de maan in een cirkelvormige baan om de aarde draait. Veronderstel dat de maan puntvormig is. De afstand aarde-maan is *D*. De hoeksnelheid van de aarde om z'n eigen as is Ω en die van de maan om de aarde is ω. Het traagheidsmoment van de aarde tov z' n rotatie-as is I_{aarde}.

1 a. Geef het totale impulsmoment *L* van het aarde-maan systeem.

2 b. Geef de totale energie *E* van het aarde-maan systeem.

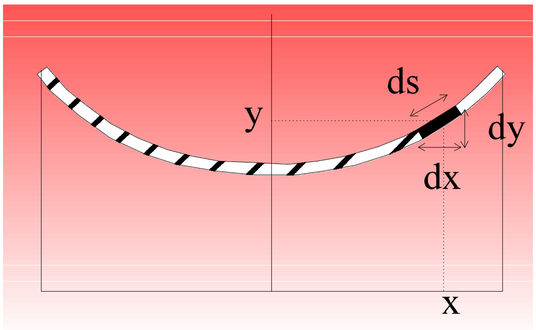
2 c. Bereken de afstand *D* als functie van ω.

Tengevolge van de getijdekrachten neemt de hoeksnelheid Ω van de aarde af. Daardoor neemt ook de hoeksnelheid ω van de maan om de aarde af.

2 d. Bereken het verband tussen $\frac{d\Omega}{dt}$ en $\frac{d\omega}{dt}$

2 e. Bereken de afname van de totale energie per seconde $\frac{dE}{dt}$ uitgedrukt in Ω, ω en $\frac{d\Omega}{dt}$.

Opgave 4. De kettinglijn



Een soepel touw met massa m en lengte L heeft een constante dichtheid $\rho = \frac{m}{L}$ kg/m. Het touw is opgehangen tussen twee even hoge punten. De vorm van het touw wordt beschreven door de functie $y = y(x)$. Elk deel ds van het touw heeft een bepaalde potentiële energie dV . De vorm van het touw is zodanig dat de *totale potentiële energie* $V = \int dV$ ***minimaal*** is.

Het gaat er nu om de functie $y = y(x)$ te vinden die *V* minimaal maakt. De lijn die door deze functie beschreven wordt heet de kettinglijn.

1 a. Geef de lengte ds uitgedrukt in $y' = \frac{dy}{dx}$ en dx.

1 b. Geef de potentiële energie van een stukje ds in het punt (x,y) uitgedrukt in y, y' en dx.

3 c. Leidt af dat de kettinglijn voldoet aan de vergelijking $yy'' - (y')^2 - 1 = 0$

1 d. Laat zien dat de functie $y = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$ aan de vergelijking in onderdeel c) voldoet en bereken de waarde van α.

EINDE

1a. $F_W = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha = \mu mg\frac{dx}{ds}$

b. $mg(h_1 - h_2) = \int F_W ds = \int_0^{x_0} \mu mg dx = \mu mhx_0$ zodat: $h_1 - h_2 = \mu x_0 = 0{,}2 \times 1500 = 300$m

2a. $(2m + M)x_{CM} = m(x_1 + x_3) + Mx_2$ dus $x_{CM} = \dfrac{m(x_1 + x_3) + Mx_2}{(2m + M)}$

b. $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2]$

c. $x_{CM} = 0 \;;\; x_1 = -x_3 \;\rightarrow\; x_2 = 0 \;;\; \dot{x}_1 = -\dot{x}_3 \;;\; \dot{x}_2 = 0$ dus $L = m\dot{x}_1^2 - kx_1^2$

uit $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$ volgt: $m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$

De oplossing van deze vergelijking is $x_1 = A\cos(\omega_1 t)$ met $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

d. $x_1 = x_3 \;;\; x_{CM} = 0 \;\rightarrow\; x_2 = -\frac{2m}{M}x_1$ zodat $L = m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)\dot{x}_1^2 - k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_1^2$

Hieruit volgt de vergelijking: $\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_1 = 0$ met als oplossing $x_1 = A\cos(\omega_2 t)$ en

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

3a. $L = I_{aarde}\Omega + mD^2\omega$

b. $E = \frac{1}{2}I\Omega^2 + \frac{1}{2}mD^2\omega^2 - G\frac{Mm}{D}$

c. $G\frac{Mm}{D^2} = m\omega^2 D$ zodat: $D = \left(G\frac{M}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} = (GM)^{\frac{1}{3}}\omega^{-\frac{2}{3}}$

d. L is constant, dus $\frac{dL}{dt} = 0$ met $L = I\Omega + m(GM)^{\frac{2}{3}}\omega^{-\frac{1}{3}}$. Dit levert: $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{3}\frac{mD^2}{I}\frac{d\omega}{dt}$

e. $E = \frac{1}{2}I\Omega^2 - \frac{1}{2}m(GM)^{\frac{2}{3}}\omega^{\frac{2}{3}}$ zodat: $\frac{dE}{dt} = I\omega\frac{d\Omega}{dt} - \frac{1}{3}m(GM)^{\frac{2}{3}}\omega^{-\frac{1}{3}}\frac{d\omega}{dt} = I(\Omega - \omega)\frac{d\Omega}{dt}$

4a. $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

b. $dV = dm\,.\,g\,.\,y = \rho ds\,.\,g\,.\,y = \rho gy\sqrt{1 + y'^2}\,dx$

c. $V = \int dV = \rho g\int y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \rho g\int f(y, y')\,dx$

Omdat V minmaal is volgt dat voor de functie f de regel van Euler geldt: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left[yy'(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}\left[y'^2 + y'^4 + yy''\right]$

zodat: $(1 + y'^2)^2 = y'^2 + y'^4 + yy''$ en dus: $yy'' - y'^2 - 1 = 0$

d. Uit $y = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$ volgt: $y' = \alpha(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$ en $y'' = \alpha^2(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) = \alpha^2 y$

Invullen levert: $\alpha^2(e^{2\alpha x} + 2 + e^{-2\alpha x}) - \alpha^2(e^{2\alpha x} - 2 + e^{-2\alpha x}) - 1 = 0$

Daaruit volgt: $4\alpha^2 = 1$ en $\alpha = 0{,}5$